

УДК 621.77.4:621.762.4

Шестаков Н. А.
Субич В. Н.
Демин В. А.
Тимофеев В. Н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Среди общепринятых методов испытаний механических свойств компактных материалов (растяжение, сжатие, кручение и др.), только при испытании на сжатие реализуется схема напряженного состояния с отрицательным средним напряжением, характерная для процессов деформации порошковых материалов и композитов (ПМиК). Другие методы испытаний неприменимы из-за низкой пластичности ПМиК [1]. Кроме испытания на одноосное сжатие применяют трехосное нагружение в камерах высокого давления [2]. Применяемые для этого установки уникальны, являются дорогостоящим оборудованием, и в большинстве случаев недоступны для систематических исследовательских работ, а тем более, в технологической практике. Ограничения в выборе методов испытаний, их трудоемкость и недостаточность информации для построения полноценной теории для расчета течения пористых материалов делает актуальным разработку виртуальных методов определения физико-механических свойств ПМиК [3].

Математическая теория для расчета процессов деформирования ПМиК развивается в рамках континуальных представлений об их пластическом течении на основе введения так называемых «представительных элементов», то есть минимальных областей, идентичных по свойствам самим порошковым телам. Размер этих элементов существенно меньше габаритных размеров пористого образца и значительно превышает размеры отдельных частиц (гранул) или пор. Хотя сами характеристики порошковой или пористой среды при такой постановке рассматриваются как непрерывные функции координат, их определение имеет смысл в объемах, не меньших объема представительного элемента, и их рассмотрение внутри указанного объема лишено смысла.

Для континуума, заполненного представительными элементами, обладающими свойством сжимаемости, вводится, как и для несжимаемых материалов, поверхность нагружения и ассоциированный с ней закон течения. Наиболее часто применяемой для изотропных пористых сред является поверхность нагружения Грина, модифицированную форму записи которой можно представить как [4]:

$$\alpha\sigma_u^2 + \beta\sigma^2 = \sigma_{sn}^2 = \delta\sigma_s^2, \quad (1)$$

где α , β и δ – функции относительной плотности $p = 1 - V_n / V$ и других характеристик материала и процесса деформирования (температуры и т. д.); V_n – объем пор в пористой заготовке; V – объем пористой заготовки; σ_s , σ_{sn} – соответственно напряжения текучести материала основы и пористого тела; $\sigma_u = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность напряжений; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; $\sigma = \sigma_{ii} / 3$ – среднее напряжение (гидростатическое давление).

В соответствии с ассоциированным законом течения зависимости между деформациями и напряжениями при пластическом течении ПМиК определяются так [1]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 3\dot{\lambda}[\delta s_{ij} + 2\nu\delta_{ij}/9]; \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 2\dot{\lambda}\nu; \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_v \delta_{ij} / 3 = 3 \dot{\lambda} \delta_{ij}; \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_u / 2 \bar{\sigma}_u, \quad (5)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ и $\dot{\epsilon}_{ij}$ – компоненты тензора и девиатора скоростей деформации;
 $\dot{\epsilon}_u = \sqrt{\dot{\epsilon}_u^2 / 6 + \dot{\epsilon}_v^2 / 6}$ – интенсивность приведенных скоростей деформаций ПМК;
 $\dot{\epsilon}_u = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / 3}$ – интенсивность скоростей деформаций, $\dot{\epsilon}_v$ – скорость объемной деформации.

Приведенные соотношения теории пластичности сжимаемых материалов показывают, что одним из ключевых вопросов теории пластичности изотропного сжимаемого материала, является определение функций α , β и δ (одна из трех несущественная). Из (1) следует:

$$\sigma_{mn}^{\circ} = \sigma_s \sqrt{\delta / \alpha}; \quad \sigma_c^{\circ} = \sigma_s \sqrt{\delta / \beta}, \quad (6)$$

где σ_{mn}° , σ_c° – величины полуосей эллипсоида (1) в плоскости $\sigma_u - \sigma$.

Как видно из (6) функции α , β и δ определяют полуоси эллипсоидной предельной поверхности и соотношение между полуосями в процессе деформации, а, следовательно, определяют упрочнение ПМК вплоть до их беспористого состояния.

Для определения вида функций α , β и δ было предложено значительное число теоретических и меньшее число экспериментальных зависимостей для различных материалов. Обзор указанных зависимостей приведен в работах [2, 5], а в табл. 1 приведены наиболее известные выражения для функций $\bar{\alpha} = \beta / \alpha$ и $\bar{\beta} = \delta / \alpha$ уравнения предельной поверхности (1), приведенного к виду:

$$\sigma_u^2 + 9 \bar{\alpha} \sigma^2 = \bar{\beta} \sigma_s^2. \quad (7)$$

Таблица 1

Теоретические выражения для функций плотности

№	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
1	$\frac{1}{4} \left\{ \frac{3[1 - (1-p)^{1/3}]}{[3 - 2(1-p)^{1/4}] \ln(1-p)} \right\}^2$	$\left\{ \frac{3[1 - (1-p)^{1/3}]}{3 - 2(1-p)^{1/4}} \right\}^2$
2	$0,25 p^2 / \ln^2(1-p)$	p^2
3	$\left[\frac{1 - 3(1-p) + 2(1-p)^{3/2}}{\sqrt{3} \ln(1-p)} \right]^2$	$[1 - 3(1-p) + 2(1-p)^{3/2}]^2$
4	$\frac{[1 - (1-p)^{2/3}]^2}{4 \ln^2(1-p)}$	$[1 - (1-p)^{2/3}]^2$
5	$0,25(1-p) / p$	p^3
6	$0,75(1-p) / (5-2p)$	$3p^2 / (5-2p)$
7	$\frac{1-p^2}{2+p^2}$	$\frac{3(2p^2-1)}{2+p^2}$

Для получения теоретических зависимостей в большинстве случаев использовался анализ предельного состояния идеализированных моделей представительного объема пористого материала при двух различных напряженных состояниях. В качестве идеализированных моделей представительного объема использовались полые толстостенный шар и труба с внутренней шаровой полостью (табл. 1, № 1, 4), полый куб с кубической полостью (табл. 1, № 2), труба с внутренней цилиндрической полостью (табл. 1, № 3). Функции плотности (табл. 1, № 5) получены теоретическим путем на основе представлений о среднеквадратичных напряжениях в вязко-деформируемом пористом теле с использованием результатов реологической теории спекания. Статистическая модель пористого материала для теоретического определения функций плотности реализована для получения функции № 6 в табл. 1. Функция № 7 в табл. 1 получена путем аппроксимации экспериментальных данных по прессованию железных порошков.

На рис. 1 показаны зависимости функций \bar{a} и \bar{b} от относительной плотности, а также результаты экспериментального определения этих зависимостей для спеченных меди и железа [1]. Расхождения расчетных значений \bar{a} и \bar{b} по данным различных авторов между собой и данными эксперимента существенны. Не представляется возможным выделить теоретические зависимости какого-либо автора сразу для двух функций. Как указывается и в работе [2] для некоторых пористых материалов теоретические формулы удовлетворительно описывают одну из функций \bar{a} или \bar{b} , в то время как другая функция определяется из соответствующего теоретического расчета с неприемлемой точностью. Однако следует отметить, что лучшее соответствие, полученных в работе [1] экспериментальных данных, наблюдается с выражениями для функций № 7, табл. 1.

Целью настоящей работы является разработка численного подхода к определению функций a , b и d на основе конечно-элементного (КЭ) моделирования пластической задачи деформирования представительного элемента при наличии в нем пор. При данном подходе рассматривается уплотнение за счет пластического деформирования частиц пористой среды и заполнения вследствие этого пор. Иные механизмы уплотнения (такие как, диффузия, спекание и другие) не учитываются, однако при холодном уплотнении они не должны играть существенной роли.

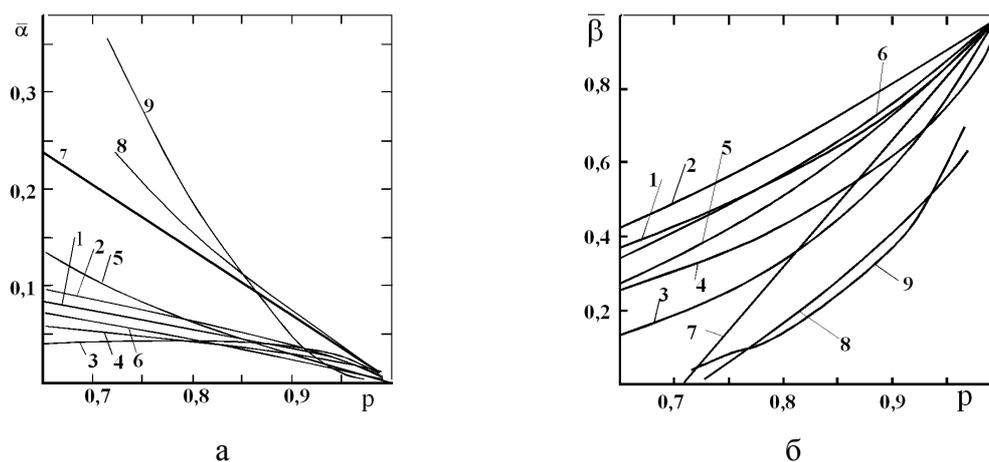


Рис. 1. Сравнение теоретических зависимостей (а) $\bar{a} = \bar{a}(p)$ и (б) $\bar{b} = \bar{b}(p)$ с физическим и виртуальным экспериментом для спеченной меди (номера теоретических кривых в соответствии с табл. 1); кривая 8 – физический эксперимент [1]; кривая 9 – виртуальный эксперимент

Формирование «пустот» осуществляется путем удаления из регулярной сетки элементов, выбранных с помощью генератора случайных чисел. Для выполнения условия изотропности

представительного объема количество удаленных элементов из сетки КЭ (пор) в каждом горизонтальном и вертикальном рядах задается одинаковым в соответствии с заданной плотностью.

Пример результатов расчета осадки представительного элемента в виде цилиндра без трения на контактных поверхностях приведен на рис. 2. Наружный слой элементов сделан «сплошным» для упрощения подсчета объема тела и, соответственно, его относительной плотности p .

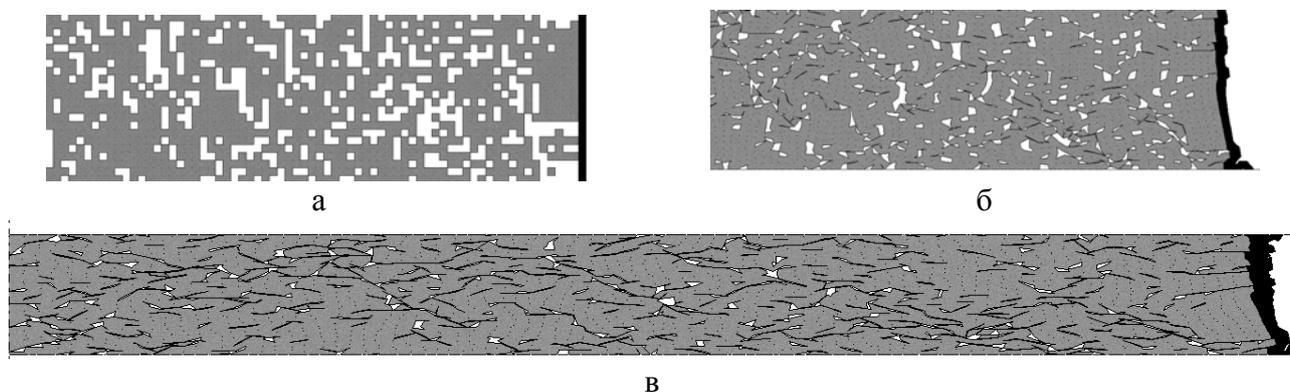


Рис. 2. Деформация представительного элемента пористого материала (показана половина сечения):

а – начальное положение, $p = 0,71$; б – ход ползуна 4 мм, $p = 0,88$; в – ход ползуна 7 мм, $p = 0,94$

Для расчетов были заданы следующие исходные данные для представительного элемента: цилиндр диаметром 40 мм, высотой 10 мм, относительная плотность $p = 0,71$. Кривая упрочнения материала основы (медного порошка марки ПМС-Н) задана в виде степенной зависимости $\sigma_s = 435 \varepsilon^{0,15}$ (МПа). В качестве результата расчета получен текущий объем представительного элемента и его размеры: высота и средний диаметр, а также текущая относительная плотность и зависимость силы деформации от хода ползуна. Следует отметить, что в реальных материалах, используемых для исследования механических свойств, поры также распределены случайным образом. Поэтому при сопоставлении расчетных и экспериментальных данных можно сравнивать только средние значения параметров и их использовать для оценки точности расчетных величин.

При проведении физического эксперимента на натурных образцах эти данные получают путем их ступенчатой осадки с промежуточными измерениями текущей силы, размеров и плотности. Текущую плотность измеряют путем гидростатического взвешивания. На основании полученных экспериментальных данных функции $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ определяют следующим образом.

Приращение объемной деформации Δe_v связано с приращением относительной плотности p так [1]:

$$\Delta e_v = -\Delta p / p. \quad (8)$$

Учитывая, что в данном случае $\Delta e_\rho = \Delta e_\varphi$; $\Delta e_v = \Delta e_z + 2\Delta e_\rho = -\Delta p / p$, где $\Delta e_\rho, \Delta e_z$ – соответственно приращения радиальной и осевой пластической деформации, имеем:

$$\Delta e_\rho = -1/2(\Delta e_z + \Delta p / p), \quad (9)$$

где:

$$\Delta e_z = \ln(h / h_0), \quad (10)$$

h , h_0 – соответственно текущее и начальное значения высоты испытуемого образца на каждом этапе ступенчатого нагружения.

При этом выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = 0; \quad \sigma_z = -q; \quad \sigma = -\frac{1}{3}q; \quad s_\rho = s_\varphi = \frac{1}{3}q; \quad s_z = -\frac{2}{3}q, \quad (11)$$

где $q = \sigma_{sn}$ – текущее давление осадки.

Тогда величина коэффициента поперечной деформации определяется через экспериментально измеряемые величины так:

$$\mu_p = -\frac{\Delta e_\rho}{\Delta e_z} \quad \text{или} \quad \mu_p = \frac{1}{2p} \left(p + \frac{\Delta p}{\Delta e_z} \right). \quad (12)$$

Поскольку из (12) и (2) следует:

$$\mu_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{(9\alpha - 2\beta)}{(9\alpha + \beta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(9 - 2\bar{\alpha})}{(9 + \bar{\alpha})}, \quad (13)$$

то, в соответствии с (7), получаем выражения для искомых функций от плотности $\bar{\alpha}(p)$, $\bar{\delta}(p)$ через экспериментальные функции $\mu_p = \mu_p(p)$ и $q = q(p)$ в виде:

$$\bar{\alpha} = (1 - 2\mu_p) / 2(1 + \mu_p); \quad \bar{\beta} = (1 + \bar{\alpha})q^2 / \sigma_s^2. \quad (14)$$

В настоящей работе данные о текущем давлении, деформации, размерах представительного элемента, его плотности и коэффициенте поперечной деформации получены в результате виртуального моделирования физического эксперимента и позволяют произвести расчет функций плотности $\bar{\alpha}$ и $\bar{\delta}$ для условия (7) по этой же методике. Отличие заключается лишь в том, что необходимые данные получены в результате виртуального эксперимента. На рис. 1, а и 1, б кривые 9 представляют собой результат обработки расчетных величин. Следует отметить, что на рис. 1 приведена сетка КЭ состоящая из элементов размером $0,25 \times 0,25$ мм с целью более наглядного представления методики. Для расчета функций плотности по формулам (14) размер КЭ принимался в соответствии с паспортом на медный порошок ПМС-Н.

Величина напряжения текучести материала основы σ_s для натурального и виртуального эксперимента определялась путем испытания на сжатие соответствующего компактного материала.

Полученные данные позволяют надеяться, что после широкой экспериментальной проверки предлагаемого подхода, появится возможность исключить трудоемкие экспериментальные исследования, связанные с определением функций плотности пористых материалов.

В работах [1, 6] показано, что функции плотности сжимаемой среды существенно зависят от схемы напряженного состояния, в частности от коэффициента жесткости $\eta = 3\sigma / \sigma_s$. Эта зависимость также может быть определена с помощью предлагаемого в данной статье подхода. Такие однородные процессы, удовлетворяющие постулату макрофизической определенности А. А. Ильюшина, как: осадка в круглом жестком контейнере представительных элементов виде цилиндрических заготовок без трения, осадка длинных параллелепипедов в условиях плоской деформации без трения, сжатие с кручением при условии запрета проскальзывания на контактных поверхностях в окружном направлении, дают возможность получить аналитические зависимости для материальных функций, определяющих поведение пористой среды при различных напряженных состояниях. Аналогично

рассмотренному в данной статье случаю осадки на плоских плитах представительного элемента в виде цилиндра, по результатам моделирования можно получить функции $\bar{\alpha}$ и $\bar{\delta}$ при различных схемах напряженного состояния и установить их зависимость от параметра η .

Рассмотренный подход к определению механических свойств на основе КЭ моделирования течения пористого материала может быть распространен на решение не менее актуальной задачи определения механических свойств композитных смесей порошковых материалов, поведение которых характеризуется свойствами сжимаемого континуума. В этом случае ставится задача определения свойств композиции при условии, что известны свойства ее составляющих, распределенных по объему случайным образом. При этом встает вопрос не только о виде функций плотности, но и о приведенных (осредненных) характеристиках базового материала, который становится неоднородным. Речь, в частности, идет о напряжении текучести базового материала, представляющего собой смесь различных порошков. Конечная цель в этом случае состоит в построении континуальной модели однородного материала со свойствами, эквивалентными свойствам неоднородного материала, имеющего заданное строение.

ВЫВОДЫ

На основе конечно-элементного моделирования процесса деформации представительного элемента сжимаемой среды предложена методика расчетного определения функций плотности эллипсоидального условия пластичности и зависимости напряжения текучести пористого материала от текущей плотности для использования их в континуальной феноменологической модели течения дилатирующей среды. Проведенное в статье сопоставление теоретических зависимостей, а также результатов виртуальных и физических экспериментов данных дает основания надеяться на то, что предложенный подход позволит существенно сократить объем трудоемких экспериментальных исследований механических свойств пористых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков Н. А. Уплотнение, консолидация и разрушение пористых материалов / Н. А. Шестаков, В. Н. Субич, В. А. Демин. – М. : Физматлит, 2009. – 272 с.
2. Прогрессивные технологические процессы штамповки деталей из порошков и оборудование / Г. М. Волкогон, А. М. Дмитриев, Е. П. Добряков [и др.] ; под общ. ред. А. М. Дмитриева, А. Г. Овчинникова. – М. : Машиностроение, 1991. – 320 с.
3. Власов А. В. Моделирование механических свойств пористых и композитных материалов / А. В. Власов, В. Н. Субич, Н. А. Шестаков // Заготовительные производства в машиностроении. – 2010. – № 3. – С. 31–35.
4. Kobayashi S. Metal forming and the finite element method / S. Kobayashi, S. I. Oh, T. Altan. – Oxford, 1989. – 378 p.
5. Doraivelu S. M. A new yield function for compressible p/m materials / S. M. Doraivelu [at al.] // International Journal of Mech. Sciences. – 1984. – V. 26, № 9/10. – P. 527–535.
6. Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е. В. Ломакин // Физическая механика. – 2007. – Т. 10. – № 5. – С. 41–52.

Шестаков Н. А. – д-р техн. наук, проф., декан МГИУ;

Субич В. Н. – д-р техн. наук, зав. кафедрой МГИУ;

Демин В. А. – д-р техн. наук, проф., ректор МГИУ;

Тимофеев В. Н. – канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой МГИУ.

МГИУ – Московский государственный индустриальный университет, г. Москва, Россия.

E-mail: shes-v@mail.msiu.ru